

Câu 1 (4,0 điểm):

Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là $x_1; x_2$.

1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.

2) Chứng minh rằng $|x_1^3 - x_2^3| \geq 2 (\forall k \in \mathbb{R})$

Câu 2 (2,0 điểm): Giải bất phương trình sau : $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > 10 - 2x$

Câu 3 (4,0 điểm): Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} mx^2 - x - 5 \leq 0 \\ (1-m)x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$

b) Tìm m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

Câu 4 (5,0 điểm):

a/ Giải phương trình: $-x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-4x}$.

b/ Cho tam giác ABC có diện tích S và các cạnh $BC = a$, $CA = b$ thỏa mãn điều kiện

$\cot A + \cot B = \frac{a^2 + b^2}{2S}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Câu 5 (4,0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$. Xác định tọa độ các điểm C , D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Câu 6 (1,0 điểm):

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký của giám thị 1:Chữ ký của giám thị 2:

Lưu ý: Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,5; thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Câu	Nội dung	Điểm
I	Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là $x_1; x_2$. 1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.	2.
	+ Đường thẳng (d) có pt: $y = kx - 1$	0,5
	+ PT tương giao (d) và (P): $-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0(*)$	0,5
	+ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ vì $\Delta = k^2 + 4 > 0 \quad \forall k$	0,5
	+ Trung điểm M của AB có hoành độ là $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-k}{2}$; M nằm trên trục tung $\Leftrightarrow \frac{-k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 0$	0,5
	2) Chứng minh rằng $ x_1^3 - x_2^3 \geq 2 (\forall k \in R)$	2,
	Theo Vi et có: $x_1 + x_2 = -k, \quad x_1 x_2 = -1$	0,5
	Ta có: $ x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = x_1 - x_2 \cdot (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 $	0,5
	Có $ x_1 - x_2 ^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4$	0,5
	$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = \sqrt{k^2 + 4}(k^2 + 1) \geq 2, \quad \forall k \in R$. Đẳng thức xảy ra khi $k = 0$	0,5

	Câu 2 (2,0 điểm): Giải bất phương trình sau : $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > 10 - 2x$	2,00
	TXĐ: $-x^2 + 8x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$	0,5
	Nếu $5 < x \leq 6$ thì $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} \geq 0 > 10 - 2x$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x: 5 < x \leq 6$	0,5
	Nếu $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 8x - 12} \geq 0 \end{cases}$ bất pt đã cho $\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 > 4x^2 - 40x + 100 \Leftrightarrow 5x^2 - 48x + 112 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < \frac{28}{5}$	0,5
	Kết hợp nghiệm, trường hợp này ta có: $4 < x \leq 5$ Tập nghiệm của bpt đã cho: $(4; 6]$	0,5

Câu 3 (2,0 điểm): Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx^2 - x - 5 \leq 0 \\ (1-m)x^2 + 2mx + m + 2 \geq 0 \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$

b) Tìm m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

Giải hệ bất phương trình khi $m = 1$	2,00
Khi $m = 1$ hệ bất phương trình trở thành	0,5
$\begin{cases} x^2 - x - 5 \leq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{21}}{2}$	1,0
Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right]$	0,5

b) Tìm m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x	2,00
Khi $m = 0$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} -x - 5 \leq 0 \\ x^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) do đó $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán Khi $m = 1$ theo câu a ta thấy cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán	0,5
Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta có hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi các bất phương trình trong hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 0 \\ \Delta_1 = 1 + 20m \leq 0 \\ 1 - m > 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - (1-m)(m+2) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ 2m^2 + m - 2 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq -\frac{1}{20} \\ m < 1 \\ -\frac{1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$	0,5
Vậy $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \leq m \leq -\frac{1}{20}$ là giá trị cần tìm.	0,5
Câu 4a (2,0 điểm):	2,0

	a/ Giải phương trình: $-x\sqrt{2-3x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2+1}\sqrt{3-4x}$.	
	Đặt $\vec{u} = (x; 1), \vec{v} = (\sqrt{2-3x}; -\sqrt{1-x})$	0,5
	từ phương trình ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = - \vec{u} \cdot \vec{v} $ suy ra $\cos(u, v) = -1$ Như vậy: $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng ...	1,5
	Suy ra: $\frac{\sqrt{2-3x}}{x} = \frac{-\sqrt{1-x}}{1}$ (1)	0,5
	Giải (1) và thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	0,5

	Câu 4b (2,5 điểm): b/ Cho tam giác ABC có diện tích S và các cạnh BC = a, CA = b thỏa mãn điều kiện $\cot A + \cot B = \frac{a^2 + b^2}{2S}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.	2,0
	$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}, \cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca \sin B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$ $\Rightarrow \cot A + \cot B = \frac{c^2}{2S}$ $\Rightarrow \frac{c^2}{2S} = \frac{a^2 + b^2}{2S}$	2
	$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C	0,5

	Câu 5 (4,0 điểm): Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3; -1), B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ O của hình bình hành ABCD.	4,00
	Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên $x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$ $y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$	1
	Suy ra $C(1; -4)$	1
	Tứ giác ABCD là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-3=1-x_D \\ 2+1=-4-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(5; -7)$	1
	Điểm O của hình bình hành ABCD suy ra O là trung điểm AC do đó $x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O\left(2; -\frac{5}{2}\right)$	1

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Câu 6	Nội dung	ĐIỂM
		1,0 đ
	Giả thiết tương đương với $\frac{b+c}{a} + 1 + \frac{c+a}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} + 1 = 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 3$	
	$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{abc}\right) = 3$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac-2) = 3abc$	0,25 đ
	Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $(a+b+c)(ab+bc+ac-2) = 3abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{9}$	
	Do đó: $ab+bc+ac-2 \leq \frac{(a+b+c)^2}{9} \Leftrightarrow 18 \geq 9(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2$	0,25đ
	$\Leftrightarrow 3 \geq \frac{9}{6}(ab+bc+ca) - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{7(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)}{6}$	
	$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq \frac{7(ab+bc+ca) + 5(a^2+b^2+c^2)}{6}$	0,25đ
	Do $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c$ nên $\frac{7(ab+bc+ca) + 5(a^2+b^2+c^2)}{6} \geq 2(ab+bc+ca)$	
	Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab+bc+ca)$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0,25đ